<u>Unidad II</u>

Matrices y determinantes.
Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Tienen también muchas aplicaciones en el campo de la física.

MATRICES

Una matriz es una tabla ordenada de escalares ai j de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denota también por (ai j), i =1, ..., m, j =1, ..., n, o simplemente por (ai j).

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con m filas y n columnas se denomina matrizm por n, o matriz m ð n.

2.1 Definición de matriz, notación y orden.

La matriz anterior se denota también por (ai j), i =1, ..., m, j =1, ..., n, o simplemente por (ai j).
Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con m filas y n columnas se denomina matrizm por n, o matriz m ð n.
Las matrices se denotarán usualmente por letras mayúsculas, A, B, ..., y los elementos de las mismas por minúsculas, a, b, ...
Ejemplo:
La siguiente matriz es una matriz 2 × 3: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

donde sus filas son (1, -3, 4) y (0, 5, -2) y sus
columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

CLASES DE MATRICES

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:
Matrices cuadradas
Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada n ð n es de orden n y se denomina matriz n-cuadrada.
Ejemplo: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, A y B son matrices cuadradas de orden 3 y 2 respectivamente.
Matriz identidad
Sea A = (ai j) una matriz n-cuadrada. La diagonal (o diagonal principal) de A consiste en los elementos a11, a22, ..., ann. La traza de A, escrito trA, es la suma de los elementos diagonales.
La matriz n-cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra posición, denotada por I, se conoce como matriz identidad (o unidad). Para cualquier matriz A,
A· I = I ·A = A.
Matrices triangulares
Una matriz cuadrada A = (ai j) es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero. Así pues, las matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

son matrices triangulares superiores de órdenes 2, 3 y 4.
Matrices diagonales
Una matriz cuadrada es diagonal, si todas sus entradas no diagonales son cero o nulas. Se denota por D = diag (d11, d22, ..., dnn). Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

son matrices diagonales que pueden representarse, respectivamente, por diag(3,-1,7) diag(4,-3) y diag(2,6,0,-1).
Traspuesta de una matriz
La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por AT.
Así, la traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{es} \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si A = (ai j) es una matriz m ð n, entonces AT = (a_{ji})
es la matriz n ð m. La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. (A + B)T = AT + BT.
2. (AT)T = A.
3. (kA)T = kAT (si k es un escalar).
4. (AB)T = BTAT.

Matrices simétricas

Se dice que una matriz real es simétrica, si AT = A; y que es antisimétrica, si AT = -A.

Ejemplo:

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos simétricos de A son iguales, o que AT = A. Siendo así, A es simétrica.

Para B los elementos simétricos son opuestos entre sí, de este modo B es antisimétrica.

A simple vista, C no es cuadrada; en consecuencia, no es ni simétrica ni antisimétrica.

Matrices ortogonales

Se dice que una matriz real A es ortogonal, si AAT = AT A = I. Se observa que una matriz ortogonal A es necesariamente cuadrada e invertible, con inversa A-1 = AT.

Consideremos una matriz 3 ð 3 arbitraria:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Si A es ortogonal, entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}.$$

Matrices normales
Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si AAT = ATA. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.
Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que AAT = ATA, la matriz es normal.

2.2 Operaciones con matrices. Suma y resta de matrices

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3 ð 2 y otra de 3 ð 3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y

$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.3 Clasificación de las matrices.

Una **matriz cuadrada** tiene un número de filas p igual a su número de columnas q.

Son matrices de orden, p x p ó p2.

Las matrices:

A = 2 0 B = 0 2 3
-3 1 -1 0 2
0 0 0

son de orden 2 x 2 y 3 x 3 respectivamente.

Los elementos a11, a22, a33, ... ann de una **matriz cuadrada** constituyen su **diagonal principal**.

La diagonal principal será:

a11 ... ...
A = ... a22 ... ...
... ... a33 ...
... ... ann

una matriz cuadrada tal que:

a11 = a22 = a33 = ... = ann = 1 y **todos los demás elementos son cero,** es una **matriz unidad.**

La representaremos por **I** o sea:

IA = 1 0
1

es una matriz de orden 2 x 2.

Una **matriz diagonal** es aquella en que los elementos que no están en la diagonal principal son ceros.

Esta es un matriz diagonal:

2 0 0 0
A = 0 3 0 0
0 0 -2 0
0 0 0 4

Una **matriz** cuyos elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son todos ceros es matriz triangular. Si todos los ceros están por encima de la diagonal principal entonces es una matriz inferior y si todos los ceros están por debajo de la diagonal principal es una matriz superior.

Ejemplo:

A = 3 0 0 es una matriz inferior.
1 2 0
-1 0 4
B = 4 1 -2
0 1 5 es una matriz superior.
0 0 3

Esquema de filas, columnas y diagonal principal.

1 0 4 7 filas
A = 0 2 5 8
0 3 6 9
1 2 1 0 diagonal principal columnas

Una **matriz nula** tiene todos sus elementos nulos.
Ejemplo:
0 0 0
A = 0 0 0
0 0 0
Una **matriz cuadrada** es simétrica si: aij = aji.
Es decir si los elementos situados a **igual distancia de su diagonal principal** son iguales.
A = 1 -3 5
-3 2 0
5 0 1
es simétrica porque: a12 = a21 = -3, a13 = a31 = 5, a23 = a32 = 0.
Una **matriz es asimétrica** si: aij = aji.
Observa si 1 = j, aii = -aii y el único número que cumple con esta igualdad es **el cero** por lo que es una matriz asimétrica **la diagonal principal esta formada por elementos nulos.**

En una matriz asimétrica los elementos situados a igual distancia de la diagonal principal son iguales en valor absoluto y de signos contrarios.
B = 0 2 -2 5
-2 0 3 6
2 -3 0 -1
-5 6 1 0
es una matriz asimétrica

Matriz escalar
Si tenemos una matriz diagonal cuyos elementos que están en la diagonal principal son todos iguales entonces tenemos una matriz escalar.
A = 3 0 0
0 3 0
0 0 3

Matriz identidad
Es toda matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.
Esta matriz se representa por 1n.
12 = 1 0
1
igualdad de matrices si y solo si tienen el mismo orden y sus elementos son iguales.
Ejemplo:
A = a b B = x y
c d z w
si en estas matrices a = x, b = y, c = z y d = w, entonces las matrices A y B son iguales.

Matriz transpuesta

Si tenemos una matriz (A) cualquiera de orden m x n entonces su transpuesta es otra matriz (A) de orden n x m donde se intercambian las filas y las columnas de la matriz (A).

Ejemplo:

Si

A = 4 -1 3

0 5 -2

entonces su traspuesta será:

At = 4 0

-1 5

2.4 Transformaciones elementales por renglón. Escalonamiento de una matriz. Rango de una matriz.

La idea que se persigue con las transformaciones elementales es convertir una matriz concreta en otra matriz más fácil de estudiar. En concreto, siempre será posible conseguir una matriz escalonada, en el sentido que definimos a continuación.

Sea A una matriz y F una fila de A. Diremos que F es nula si todos los n´umeros de F coinciden con el cero. Si F es no nula, llamamos PIVOTE de F al primer numero distinto de cero de F contando de izquierda a derecha.

Una MATRIZ ESCALONADA es aquella que verifica las siguientes propiedades:

Todas las filas nulas (caso de existir) se encuentran en la parte inferior de la matriz.

El pivote de cada fila no nula se encuentra estrictamente mas a la derecha que el pivote de la fila de encima.

Por ejemplo, entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A no es escalonada, mientras que B y C si lo son.

Dada una matriz escalonada E se define el RANGO de E, que representamos por rg (E), como el numero de filas no nulas de E.

En los ejemplos B y C de arriba se tiene rg (B) = rg(C) = 2, sin embargo no podemos decir que rg(A) = 3 ya que A no está escalonada. Otro ejemplo, las matrices nulas tienen rango cero y la matriz identidad de orden n cumple rg (In) = n.

La siguiente cuestión que abordaremos es la definición de rango para una matriz cualquiera que no esté escalonada. La idea será la de transformar la matriz dada en otra que sea escalonada mediante las llamadas transformaciones elementales por filas que describimos a continuación.

Dada una matriz A cualquiera, las TRANSFORMACIONES ELEMENTALES por filas de A son tres:
Intercambiar la posición de dos filas.
Multiplicar una fila por un número real distinto de cero.
Sustituir una fila por el resultado de sumarle a dicha fila otra fila que ha sido previamente multiplicada por un número cualquiera.
Nota: Análogamente podríamos hacerlo todo por columnas; sin embargo, son las transformaciones por filas las que son importantes en los sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos después.

El siguiente resultado nos garantiza que siempre podemos transformar una matriz cualquiera en otra escalonada.

=Teorema=
A partir de cualquier matriz A se puede llegar, mediante una cantidad finita de transformaciones elementales, a una matriz escalonada E.

Veamos en un ejemplo cómo se hace. Obsérvese que, primero, hacemos que la componente (1,1) de la matriz de partida sea igual a uno. Luego, se hace que el resto de componentes de la primera columna sean cero. Después se pasa a la componente (2,2), y así sucesivamente.

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2'=F_2-F_1}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3'=F_3+6F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 13 \end{pmatrix} \underset{F_3'=F_3+4F_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3'=-F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3'=-F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

El teorema anterior nos permite hacer una definición importante:

Dada una matriz A cualquiera se define el RANGO de A y lo denotamos rg(A) como el rango de cualquier matriz escalonada E equivalente con A (se demuestra que este número no depende de la matriz escalonada E a la que se llegue). El rango siempre es un número menor o igual que el número de filas y el número de columnas de A. Además, el rango es cero si y sólo si A = 0. En nuestro ejemplo de antes, el rango es 3.

2.5 Cálculo de la inversa de una matriz.
Sabemos ya multiplicar matrices y hemos visto algunas de las propiedades de esta operación. Recordemos, en primer lugar, que no siempre es posible efectuar la multiplicación de dos matrices, y en segundo lugar, que aunque sea posible hacer esta multiplicación, en general no es conmutativo, es decir A·B es distinto de B*A.

En el caso particular de que tratemos con matrices cuadradas del mismo orden A y B, es claro que podemos efectuar los productos A·B y B·A, que darán como resultado otra matriz del mismo orden, aunque, como ya se ha dicho, las matrices resultantes serán, en general, distintas.

Sabemos también que el elemento neutro del producto de matrices es la matriz identidad In. Por analogía con el caso de los números reales, podemos plantearnos la siguiente cuestión: Si tenemos un número real, por ejemplo el 2, podemos interesarnos en buscar el inverso del 2 para el producto, es decir un número real x tal que 2·x = 1, el producto de 2 por x sea igual al elemento neutro, el 1.

Evidentemente, en el caso de los números reales es bien fácil despejar x para obtener, en nuestro caso, que x =12, es decir, el inverso de un número real es otro número que multiplicado por ´el da el elemento neutro, el 1.

Todo número real, salvo el 0, tiene inverso.

Trasladando esto a las matrices, nos podemos plantear si dada una matriz cuadrada A de orden n, cualquiera, existe su inversa X para el producto de matrices, tal que A · X = In es decir, el producto de A por su inversa produce el elemento neutro matricial, la matriz identidad In. Sin embargo, hay algunas diferencias con respecto al caso de los números reales:
No podemos “despejar” la matriz X del modo X = In A, porque no hemos definido la división de matrices.
No todas las matrices cuadradas no nulas tienen matriz “inversa” (sea lo que sea, por analogía con los números).

Definamos, en primer lugar, el término de matriz inversa: Dada una matriz cuadrada de orden n , A, se dice que A es invertible (o que posee inversa o que es no singular o que es regular), si existe otra matriz del mismo orden, denominada matriz inversa de A y representada por A−1 y tal que: A * A−1 = In y A−1 * A = In

Si A no tiene inversa, se dice que es singular o no invertible.

Si una matriz tiene inversa, dicha matriz inversa es única (sólo hay una).

2.6 Definición de determinante de una matriz.

El determinante de una matriz cuadrada es un número real cuya definición exacta es bastante complicada. Por ello, definiremos primero el determinante de matrices pequeñas, y estudiaremos métodos y técnicas para calcular determinantes en general. Solamente se puede calcular el determinante a matrices cuadradas.

En cuanto a la notación, a veces el determinante se escribe con la palabra det, y otras veces se indica sustituyendo los paréntesis de la matriz por barras verticales.

El determinante de una matriz determina si los sistemas son singulares o mal condicionados. En otras palabras, sirve para determinar la existencia y la unicidad de los resultados de los sistemas de ecuaciones lineales.

• El determinante de una matriz es un número.
• Un determinante con valor de cero indica que se tiene un sistema singular.
• Un determinante con valor cercano a cero indica que se tiene un sistema mal condicionado.

Un sistema singular es cuando en el sistema de ecuaciones se tiene a más de una ecuación con el mismo valor de la pendiente. Por ejemplo ecuaciones que representan líneas paralelas o ecuaciones que coinciden en los mismos puntos de graficación.

En un sistema mal condicionado es difícil identificar el punto exacto en que las líneas de las ecuaciones se interceptan.

- El determinante de una matriz 1×1 es: $\det(a) = a$.
- El determinante de una matriz 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- El determinante de una matriz 3×3 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

La fórmula anterior se conoce como *Regla de Sarrus*.

- Veamos ahora como calcular el determinante de una matriz cuadrada cualquiera. Para ello, necesitamos antes el concepto de menor adjunto de una matriz. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Dado un par de índices (i, j) representamos por A_{ij} a la matriz que resulta al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El MENOR ADJUNTO δ_{ij} de A es el número real dado por:

$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|.$$

2.7 Propiedades de los determinantes.

1.- |At|= |A| El determinante de una matriz A y el de su traspuesta At son iguales.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad A^t = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

2.-|A|=0 Si: Posee dos líneas iguales

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los elementos de una línea son nulos.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Los elementos de una línea son combinación lineal de las otras.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

F3 = F1 + F2

3.-Un determinante triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$$

4.-Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas paralelas su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

5.-Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra paralela multiplicados previamente por un nº real el valor del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_3 = 2C_1 + C_2 + C_3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 16$$

6.-Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier línea, pero sólo una.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 1 & 2 \\ 1\cdot 2 & 2 & 0 \\ 3\cdot 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

7.-Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a+b & a+c & a+d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & a & a \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ b & c & d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

8.-|A•B| =|A|•|B| El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

2.8 Inversa de una matriz cuadrada a través de la adjunta.
Sea A una matriz de nxn. Entonces A es invertible si y solo si detA≠0. Si detA≠0, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Si detA≠0, entonces se demuestra que (1/detA)(adjA) es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A)\left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) = \frac{1}{\det A}[A(\operatorname{adj} A)] \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{\det A}(\det A)I = I$$

Si AB=I, entonces B=A-1. Así, (1/detA)adjA=A-1

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y, de ser así, calcule A^{-1}.

Como $\det A = 3 \neq 0$ se ve que A es invertible. Del ejemplo 1

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

2.9 Aplicación de matrices y determinantes.

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Ejemplo: Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en euros) indicado por la tabla siguiente:

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0'04	0'08	0'12
Color F	0'03	0'05	0'08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

Resumir la informaci´on anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

Nos piden que organicemos la información anterior en dos matrices de tamaño concreto. Si nos fijamos en las tablas, es sencillo obtener las matrices:

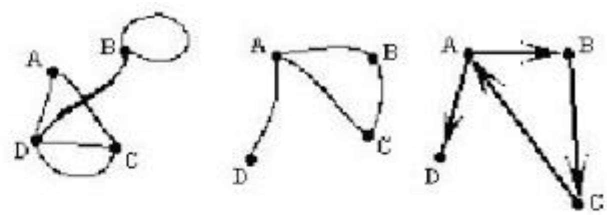
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2\ \text{ud} & 5\ \text{ud} & 10\ \text{ud} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{N} \\ \text{F} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{N} & \text{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'04 & 0'03 \\ 0'08 & 0'05 \\ 0'12 & 0'08 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2\ \text{ud} \\ 5\ \text{ud} \\ 10\ \text{ud} \end{array}$$

Estas matrices se denominan matrices de información, y simplemente recogen los datos numéricos del problema en cuestión.

Otras matrices son las llamadas matrices de relación, que indican si ciertos elementos están o no relacionados entre sí. En general, la existencia de relación se expresa con un 1 en la matriz y la ausencia de dicha relaci´on de expresa con un 0.

Estas matrices se utilizan cuando queremos trasladar la información dada por un grafo y expresarla numéricamente.

En Matemáticas, un grafo es una colección cualquiera de puntos conectados por lineas. Existen muchos tipos de grafos. Entre ellos, podemos destacar:
Grafo simple: Es el grafo que no contiene ciclos, es decir, lineas que unan un punto consigo mismo, ni lineas paralelas, es decir, lineas que conectan el mismo par de puntos.
Grafo dirigido: Es el grafo que indica un sentido de recorrido de cada linea, mediante una flecha.
Estos tipos de grafo pueden verse en la figura:



Relacionadas con los grafos se pueden definir algunas matrices. Entre todas ellas, nosotros nos fijaremos en la llamada matriz de adyacencia, que es aquella formada por ceros y unos exclusivamente, de tal forma que:

un 1 en el lugar (i,j) expresa la posibilidad de ir desde el punto de la fila i hasta el punto de la columna j mediante una linea que los una directamente.

un 0 en el lugar (i,j) expresa la imposibilidad de ir del primer punto al segundo mediante una linea que los una directamente.

La matriz de adyacencia del grafo dirigido de la figura anterior será:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$